EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2019

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **,** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA=B^t$**, donde** X^t**,** B^t **denotan las traspuestas. Discútelo según los valores de** m**.**

MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos el sistema que nos dicen:

$$(x \quad y \quad z)\cdot\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}=(2m^2-1 \quad m \quad 1)\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (2-m)x+y+mz=2m^2-1 \\ x+my+z=\quad m \\ (2m-1)x+y+z=\quad 1 \end{array}\right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2m-m^2+2m-1+m-2m^3+m^2-1-2+m=-2m^3+6m-4=0\Rightarrow m=1\ ;\ m=-2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=1$

Para $m=1\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=1$

Para $m=-2\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+5F_2]{F_1-4F_2}\begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 6 \end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$

Para $m=-2\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+5F_2]{F_1-4F_2}\begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 & 15 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -9 & 6 & -9 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+F_1}$

$\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 & 15 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=3$

	R(A)	R(M)	
$m=1$	1	1	Sistema compatible indeterminado
$m=-2$	2	3	Sistema incompatible
$m\neq 1$ y -2	3	3	Sistema compatible determinado

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} mx-\ \ y+13z=0 \\ 2x-my+\ 4z=0 \\ \ \ x+\ \ \ y+\ 7z=0 \end{array}\right.$

a) Encuentra los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.
b) Resuelve el sistema para $m=3$. En este caso, ¿hay alguna solución en la que $x=10$? Razona tu respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 13 \\ 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7m^2+9m+36=0 \Rightarrow m=3\ ;\ m=-\frac{12}{7}$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	
$m=3$	2	S. Compatible indeterminado
$m=-\frac{12}{7}$	2	S. Compatible indeterminado
$m\neq 3\ y\ -\frac{12}{7}$	3	S. Compatible determinado

Luego, el sistema tiene infinitas soluciones para $m=3 \quad y \quad m=-\frac{12}{7}$

b) Para $m=3$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y+13z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-y=-13z \\ 2x-3y=-4z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-5t \\ y=-2t \\ z=t \end{array}\right.$$

Si $x=10 \Rightarrow -5t=10 \Rightarrow t=-2$. Luego la solución es: $x=10\ ;\ y=4\ ;\ z=-2$

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Encuentra los valores de a **para los que el sistema dado por** $AX=2X$ **tiene infinitas soluciones.**

b) Para $a=0$**, si es posible, resuelve** $AX=2X$ **.**

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $AX=2X \Rightarrow AX-2X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (a-2)x+y+z=0 \\ x+(a-2)y+z=0 \\ x+y+(a-2)z=0 \end{matrix}\right\}$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{vmatrix} = a^3-6a^2+9a=0 \Rightarrow a=0\ ;\ a=3$$

$$Para\ \ m=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3+F_1]{2F_2+F_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

$$Para\ \ m=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$$

	R(A)	
$a=0$	2	S. Compatible indeterminado
$a=3$	1	S. Compatible indeterminado
$a\neq 0\ y\ 3$	3	S. Compatible Determinado

c) Resolvemos el sistema para $a=0$

$$\left.\begin{matrix} x-2y+z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-2y=-t \\ -2x+y=-t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{aligned} x+\lambda y+z &= 4 \\ -\lambda x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= \lambda+3 \end{aligned}\right.$

a) Discute el sistema según los valores de λ.
b) Resuelve el sistema, si es posible, para $\lambda=1$
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \,;\, \lambda = -1$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $\lambda=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda=1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Para $\lambda=-1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para

$\lambda=-1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$

	R(A)	R(M)	
$\lambda=1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\lambda=-1$	2	3	Sistema incompatible
$\lambda\neq 1$ y -1	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $\lambda=1$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 4 \\ -x+y+z &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y &= 4-t \\ -x+y &= 1-t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} \\ y &= \frac{5-2t}{2} \\ z &= t \end{aligned}\right.$$

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A según los valores de m.

b) Sabiendo que para $m=1$ el sistema dado por $AX=B$ tiene solución, encuentra k y resuélvelo.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2+2m-1=0 \Rightarrow m=1$$

Calculamos el rango de la matriz A.

Para $m=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $m \neq 1 \Rightarrow R(A)=3$

b) Ya hemos visto que para $m=1 \Rightarrow R(A)=2$. Como nos dicen que el sistema tiene solución, el rango de la matriz ampliada también tiene que ser 2, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k+1-1=0 \Rightarrow k=0$$

Luego, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=0 \\ y=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=-1-t \ ; \ y=1 \ ; \ z=t$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{r} mx+(m+1)z=m \\ my+z=m \\ y+mz=m \end{array}\right.$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Resuélvelo, si es posible, para $m=1$.
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & m+1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - m = 0 \Rightarrow m=0\ ;\ m=1\ ;\ m=-1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

Para $m=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$; $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Para $m=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$; $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Para $m=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=-1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$

	R(A)	R(M)	
$m=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m=-1$	2	3	S. Incompatible
$m\neq 0, 1\ y\ -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $m=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-2t \\ y=1-t \\ z=t \end{array}\right.$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ (m+2)x+y-z&=m \\ 3x+(m+2)y+z&=m \end{aligned}\right.$.

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m=0$.
MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{vmatrix} = 2m^2+8m=0 \Rightarrow m=0 \;;\; m=-4$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow R(A)=2$ para $m=0$ y $m=-4$

Si $m=0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

$m=-4 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2+2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_3+5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow R(M)=3$

	R(A)	R(M)	
$m=0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m=-4$	2	3	S. Incompatible
$m\neq 0$ y -4	3	3	S. Compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $m=0$:

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 2x+y-z&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=-2z \\ 2x+y&=z \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=3z \;;\; y=-5z \;;\; z=z$$

Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.
MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Llamamos $x =$ ángulo menor
$y =$ ángulo mayor
$z =$ otro ángulo

Planteamos y resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y}{2} \\ x + y = 2z \\ x + y + z = 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = 180 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 40^\circ \ ; \ y = 80^\circ \ ; \ z = 60^\circ$$