EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2021

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Reserva 1, Ejercicio 5
- Reserva 2, Ejercicio 5
- Reserva 3, Ejercicio 6
- Reserva 4, Ejercicio 6
- Julio, Ejercicio 5

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$**, con determinante igual a 5.**

a) Calcula razonadamente el determinante de $2A^3$

b) Calcula razonadamente los determinantes $\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & \frac{1}{2} & 3 \\ 2c & -\frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix}$ **y** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 5.

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que: $|k\cdot A_n|=k^n\cdot|A|$ y que: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$, luego:

$$|2A^3|=|2A\cdot A\cdot A|=|2A||A|\cdot|A|=2^3|A|\cdot|A|\cdot|A|=2^3\cdot 5^3=1000$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & \frac{1}{2} & 3 \\ 2c & -\frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1)} =2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ b & \frac{1}{2} & 1 \\ c & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1)} =3\cdot \begin{vmatrix} a & -2 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1)} =-3\cdot \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} =-3\cdot 5=-15$$

Propiedades aplicadas

(1) Si una fila (columna) de un determinante está multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & -2 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(3)} =0+ \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & -2 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \xrightarrow{(2)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & -2 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(3)} =0+ \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \xrightarrow{(1)\,y\,(4)} 2\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =2\cdot 5=10$$

Propiedades aplicadas

(2) Si una línea de una determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes. En el primero ponemos el primer sumando y en el segundo el segundo sumando.
(3) Si un determinante tiene dos líneas iguales, el determinante vale 0.
(4) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta

Considera la matriz: $A=\begin{pmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de *m* existe la inversa de la matriz *A*?. Razona la respuesta.

b) Para $m=1$**, halla** $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$ **.**

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*

$$|A|=\begin{vmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{vmatrix}=2m=0 \Rightarrow m=0$$

Luego, tiene inversa para todos los valores de $m \neq 0$

b) Para $m=1$ la matriz *A*, es: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y además $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot A^{-1}=2\cdot A^{-1}$

Calculamos la inversa de *A* para $m=1$.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2}$$

Luego:

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=2\cdot A^{-1}=2\cdot\frac{\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 2.

a) Calcula razonadamente el determinante de $\left|\frac{1}{3}A^{-1}\cdot A^{t}\right|$

b) Calcula razonadamente los determinantes $\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 6.

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que: $|k\cdot A_n|=k^n\cdot|A|$ y que: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$. Además $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ y que $|A^t|=|A|$,

luego: $\left|\dfrac{1}{3}A^{-1}\cdot A^{t}\right|=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot|A^{-1}|\cdot|A^t|=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\dfrac{1}{|A|}\cdot|A|=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

b) $\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}\xrightarrow{(1)}=2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\xrightarrow{(2)}=-6\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-6\cdot 2=-12$

Propiedades aplicadas

(1) Si una fila (columna) de un determinante está multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(2) Si intercambiamos dos filas o columnas de un determinante, el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}\xrightarrow{(3)}=\begin{vmatrix} 2a & c & b \\ 2d & f & e \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2b & c & b \\ -2e & f & e \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}\xrightarrow{(4)}=\begin{vmatrix} 2a & c & b \\ 2d & f & e \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}+0=$$

$$=\xrightarrow{(1)}2\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}\xrightarrow{(2)}2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)=-4$$

Propiedades aplicadas

(3) Si una línea de una determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes. En el primero ponemos el primer sumando y en el segundo el segundo sumando.

(4) Si un determinante tiene dos líneas iguales, el determinante vale 0.

(1) Si una fila (columna) de un determinante está multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(2) Si intercambiamos dos filas o columnas de un determinante, el determinante cambia de signo.

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{m} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ ***y*** $B=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{m} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

a) Calcula *m* para que $A\cdot B$ no tenga inversa.
b) Estudia el rango de la matriz $B\cdot A$ según los valores de *m*.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 6.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1+m & 2m \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de $A\cdot B$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1+m & 2m \end{vmatrix}=2m+1+m=3m+1=0\Rightarrow m=-\frac{1}{3}$$

Luego, para $m=-\frac{1}{3}$ la matriz $A\cdot B$ no tiene inversa

b) Calculamos

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1+m & 1 \\ 2 & 2m & 2 \\ m-1 & -2m & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz

$$|B\cdot A|=\begin{vmatrix} 2 & -1+m & 1 \\ 2 & 2m & 2 \\ m-1 & -2m & -1 \end{vmatrix}=-4m+2m^2-4m+2-4m-2m^2+2m+8m-2+2m=0$$

Luego, para cualquier valor de m el rango siempre es menor que 3.

Como el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow$ el rango de $B\cdot A$ siempre es 2

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2=-A^{-1}$

b) Dadas las matrices: $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

calcula la matriz X **que verifica** $A^4X+B=AC$

MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, se cumple que: $A^2=-A^{-1}$

b) Despejamos la matriz X

$$A^4X+B=AC\Rightarrow A^2\cdot A^2\cdot X=AC-B\Rightarrow(-A^{-1})\cdot(-A^{-1})\cdot X=AC-B\Rightarrow A^{-1}A^{-1}\cdot X=AC-B\Rightarrow$$
$$A\cdot A\cdot A^{-1}A^{-1}\cdot X=A^2AC-A^2B\Rightarrow X=-C+A^{-1}B$$

$$X=-C+A^{-1}B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -19 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$