EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2024

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 5

emestrada

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{2024}

b) Halla la matriz X **,si es posible, que verifica** $A^2\cdot X\cdot A+I=O$**, donde** I **y** O **son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.**

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos: $A^2=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $A^n=\begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{8} & \frac{n}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{2024}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{2024}{8} & \frac{2024}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Despejamos la matriz X:

$$A^2\cdot X\cdot A+I=O\Rightarrow A^2\cdot X\cdot A=-I\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot A\cdot X\cdot A=-I\cdot A^{-1}\Rightarrow A\cdot X\cdot A=-A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A\cdot A^{-1}=-A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A^{-1}\Rightarrow X=-\left(A^{-1}\right)^3=-A^{-3}$$

Luego, $X=-A^{-3}=-\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{8} & \frac{-3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

emestrada