EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2024

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 7
- Junio, Ejercicio 8

a) Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases}$.

b) Halla el punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi \equiv x-2y+z+6=0$

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=4+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$. El vector director de la recta $(1,1,1)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación: $x+y+z+D=0$
Como queremos que pase por el punto $(2,2,1)$.

$$x+y+z+D=0 \Rightarrow 2+2+1+D=0 \Rightarrow D=-5$$

Luego, el plano que nos piden es: $x+y+z-5=0$.

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$x+y+z-5=0 \Rightarrow 4+t+1+t+t-5=0 \Rightarrow 3t=0 \Rightarrow t=0$$

Luego, el punto de corte es: $M=(4+0,1+0,0)=(4,1,0)$.

Si llamamos al punto simétrico $P'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(2,2,1)+(a,b,c)}{2}=(4,1,0) \Rightarrow P'=(6,0,-1)$$

b) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por Q y es perpendicular al plano: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=-3+t \end{cases}$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano, sustituyendo la recta en la ecuación del plano

$$x-2y+z+6=0 \Rightarrow 1+t+2+4t-3+t+6=0 \Rightarrow t=-1$$

luego, el punto es: $M=(1-1,-1+2,-3-1)=(0,1,-4)$

Si llamamos al punto simétrico $Q'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,-1,-3)+(a,b,c)}{2}=(0,1,-4) \Rightarrow Q'=(-1,3,-5)$$

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*.
b) Calcula la ecuación del plano paralelo a *r* y *s* que equidista de ambas rectas.
MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow A = (0,0,0) \ ; \ \vec{u} = (1,0,2)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -7 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (-7,0,0) \ ; \ \vec{v} = (-1,1,0)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (-7,0,0)$ y averiguamos el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 3 \Rightarrow \text{ Las rectas se cruzan.}$$

b) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores directores del plano, luego, el vector normal del plano es:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-2,1)$$

Por lo tanto, el plano tiene de ecuación: $\pi \equiv -2x - 2y + z + D = 0$

El punto *A* de la recta *r* y el punto *B* de la recta *s* tienen que estar a la misma distancia del plano, luego:

$$\left. \begin{aligned} d(A,\pi) &= \frac{|D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} \\ d(B,\pi) &= \frac{|14 + D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} = \frac{|14 + D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D| = |14 + D| \Rightarrow \begin{cases} D = 14 + D \Rightarrow No\ tiene\ solución \\ D = -14 - D \Rightarrow D = -7 \end{cases}$$

Luego, el plano que nos piden es: $\pi \equiv -2x - 2y + z - 7 = 0$