PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2024

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 3
- Junio, Ejercicio 4

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x\neq -1, x\neq 1$. Calcula una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto (0,1).
MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios

$$\begin{array}{l|l} x^3+2 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ \hline x+2 & \end{array}$$

Con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx=\int x\,dx+\int \frac{x+2}{x^2-1}dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{x+2}{x^2-1}dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-1=0\Rightarrow x=1$; $x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A* y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1\Rightarrow 3=2A\Rightarrow A=\frac{3}{2}$$

$$x=1\Rightarrow 1=-2B\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$$

Con lo cual: $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{\frac{3}{2}}{x-1}dx+\int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}dx=\frac{x^2}{3}+\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$

Calculamos la primitiva que pasa por $(0,1)$

$$F(0)=1\Rightarrow \frac{0^2}{3}+\frac{3}{2}\ln|0-1|-\frac{1}{2}\ln|0+1|+C=1\Rightarrow C=1$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+1$

Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$.

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $f'(x)=\int x\cos x\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ \ du=dx \\ dv=\cos x\,dx;\ v=sen\,x \end{array}}$$

$$f'(x)=\int x\cos x\,dx = x\cdot sen\,x-\int sen\,x\,dx = x\cdot sen\,x+\cos x+C$$

Calculamos

$$f(x)=\int x\cdot sen\,x+\cos x+C\,dx=\int x\cdot sen\,x\,dx+\int \cos x\,dx+\int C\,dx=\int x\cdot sen\,x\,dx+sen\,x+Cx+D$$

Calculamos por partes $\int x\cdot senx\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ \ du=dx \\ dv=sen\,x\,dx;\ v=-\cos x \end{array}}$$

$$\int x\cdot senx\,dx=-x\cdot\cos x+\int\cos x\ dx=-x\cdot\cos x+sen\,x$$

Luego: $f(x)=-x\cdot\cos x+sen\,x+sen\,x+Cx+D=-x\cdot\cos x+2sen\,x+Cx+D$

Como nos piden una primitiva que pase por $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$, sustituyendo podemos calcular el valor de C y D

$$f(0)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow -0\cdot\cos 0+2sen\,0+C\cdot 0+D=\frac{\pi}{2}\Rightarrow D=\frac{\pi}{2}$$

$$f(\pi)=2\pi\Rightarrow -\pi\cdot\cos\pi+2sen\,\pi+C\cdot\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi\Rightarrow\pi+C\cdot\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es: $f(x)=-x\cdot\cos x+2sen\,x+\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}$